

## სიმეტრიული ფრთის პროფილის კონტურის განსაზღვრის თეორიული მოდელი წინააღმდეგობის მინიმიზაციის მიზნით

ბიძინა აბესაძე<sup>1</sup>, საბა კოპალიანი<sup>2</sup>, ლიზი უბილავა<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup> საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი

ქეთევან დედოფლის გამზირი №16, 0103 თბილისი, საქართველო

**რეზიუმე:** ნაშრომში განხილულია ფრთის სიმეტრიული პროფილის კონტურის განსაზღვრის ახალი მეთოდიკა, რომელიც ეფუძნება უმცირესი ქმედების პრინციპსა და ვარიაციული კალკულუსის გამოყენებას. შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელის მიზანია წინააღმდეგობის ძალის მინიმიზაცია და გეომეტრიულ-ფიზიკური სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება. წარმოდგენილი თეორიული ანალიზი მნიშვნელოვანი ნაბიჯია საჰაერო აპარატების აეროდინამიკური ზედაპირების კონსტრუირების მიმართულებით, რადგან არსებობს რიგი პრობლემები, ჰაერის ნაკადის მცირე რეინოლდსის რიცხვებზე მოქმედებისას. აღნიშნული მოდელი იძლევა შესაძლებლობას შეფასდეს ფრთის პროფილის ფორმისა და დინამიკური პარამეტრების გავლენა საერთო აეროდინამიკურ წინააღმდეგობაზე. გარდა ამისა, ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ სიმეტრიული პროფილის შემთხვევაში ნულოვანი შეტევის კუთხისას მინიმალური წინააღმდეგობის მიღწევა მხოლოდ თეორიული გზით შეუძლებელია, რაც მიუთითებს უფრო კომპლექსური, ასიმეტრიული პროფილების შემდგომი კვლევის აუცილებლობაზე. მიღებული შედეგები წარმოადგენს საფუძველს გაუმჯობესებული პროფილის ოპტიმიზაციისა და ფრთის ფორმის მოდიფიკაციის მეთოდების შემუშავებისთვის.

**საკვანძო სიტყვები:** აეროდინამიკა, ფრთის პროფილი, წინააღმდეგობის მინიმიზაცია, ვარიაციული კალკულუსი, უმცირესი ქმედების პრინციპი, ლაგრანჟის განტოლება, ოპტიმიზაცია, ნაკადის სეპარაცია.

### შესავალი

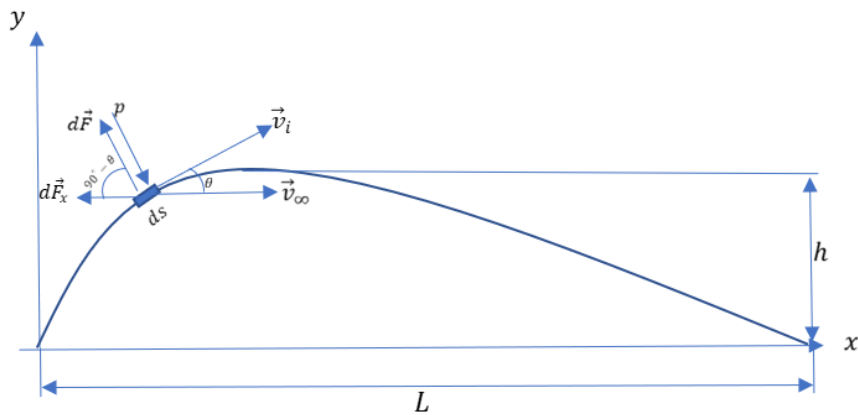
თანამედროვე ავიაკაციაში ფრთის პროფილის ფორმის ოპტიმიზაცია ერთ-ერთ უმთავრეს ამოცანად რჩება როგორც აეროდინამიკური, ისე ენერგოეფექტურობის თვალსაზრისით. ფრენის ეკონომიურობა, საწვავის მოხმარება და მანევრულობის შესაძლებლობები პირდაპირ დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენადაა ფრთის გეომეტრია მორგებული ჰაერის ნაკადის მახასიათებლებსა და რეინოლდსის რიცხვის დიაპაზონზე. ამიტომაც, ფრთის კონტურის განსაზღვრის პრობლემა არა მხოლოდ თეორიული მნიშვნელობისაა, არამედ პრაქტიკულად მნიშვნელოვან როლს ასრულებს საჰაერო ხომალდების დიზაინსა და საინჟინრო პროექტირების პროცესში.

აეროდინამიკური პროფილების ანალიზისა და ოპტიმიზაციის მიმართულებით მრავალი მეთოდი შემუშავდა, რომელთა შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს მათემატიკურ

მოდელირებასა და ვარიაციული ანალიზის საფუძველზე აგებულ მოდელებს. ამგვარი მიდგომა იძლევა შესაძლებლობას დინამიკური და გეომეტრიული ფაქტორების ურთიერთკავშირი განისაზღვროს ზუსტად, რაც საჭიროა ფრთის ზედაპირის ფორმის ისეთი არჩევისთვის, რომელიც უზრუნველყოფს მინიმალურ წინააღმდეგობასა და სტაბილურ ნაკადს სხვადასხვა ფრენის რეჟიმებში.

### ძირითადი ნაწილი

ნაშრომის პრობლემატიკა გულისხმობს ფრთის პროფილის იმგვარი კონტურის პოვნას, რომელიც, გარდა აუცილებელი მოთხოვნებისა, დააკმაყოფილებს უმცირესი წინააღმდეგობის ძალის შექმნის პირობას.



სურ. 1. ფრთის პროფილზე მოქმედი ძალები

სურ. 1-ის მიხედვით:  $dF$  არის რეაქციის ძალა,  $p$  - სტატიკური წნევა,  $ds$  - კონტურის ელემენტარული ნაწილი,  $dF_x$  - შუბლა წინააღმდეგობის ძალა,  $v_i$  - მხები სიჩქარე,  $v_\infty$  - თავისუფალი ნაკადის სიჩქარე,  $\theta$  - კუთხე მხებ სიჩქარეს და თავისუფალი ნაკადის სიჩქარეს შორის,  $L$  - ფრთის პროფილის სიგრძე,  $h$  - მაქსიმალური სიმაღლე.

ფრთის პროფილზე მოქმედი წინააღმდეგობის ძალა შეიძლება წარმოდგეს სამი შესაკრების სახით:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{სტატიკური}} + \vec{F}_{\text{დინამიკური}} + \vec{F}_{\text{ბახუნის}} \quad (1)$$

სადაც სტატიკური დატვირთვა გამოწვეულია სტატიკური წნევით, ის მოქმედებს კონტურის მართობულად. შემდგომში აღებულია მისი ჰორიზონტალური მდგენელი.

$$dF_{\text{სტატიკური}} = p ds \cos(90^\circ - \theta) = p ds \sin \theta = p b dl \sin \theta \quad (2)$$

სადაც  $ds = bdl$  ფრთის ზედაპირის ფართის ელემენტი,  $dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx$  - კონტურის ელემენტის სიგრძე, ხოლო  $b$  - ფრთის სიგრძე.

მოცემულ შემთხვევაში ბერნულის განტოლება გამარტივდება რადგან, ფრთის პროფილის სიგანის სიმცირის გამო, შეიძლება იგულისხმებოდეს, რომ  $h_1 = h_2$ , შედეგად მივიღებთ [1, 2, 3]:

$$P + \frac{1}{2}\rho v_i^2 = P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \Rightarrow P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 - \frac{1}{2}\rho v_i^2 \quad (3)$$

ნაკადის უწყვეტობის პირობიდან გვექნება:

$$\frac{dl}{v_i} = \frac{dl \cos \theta}{v_\infty} \Rightarrow v_i = \frac{v_\infty}{\cos \theta} \quad (4)$$

ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსიდან გამომდინარე:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = y' \quad (5)$$

ხოლო

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan \theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \text{ და } \sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1+(\tan \theta)^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (6)$$

(4), (5) და (6)-ის გათვალისწინებით (3) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$P = P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 (y')^2 \quad (7)$$

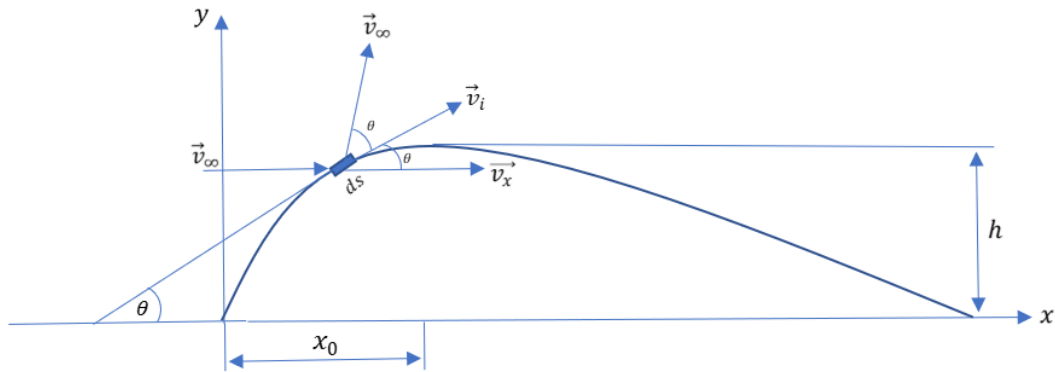
ამავდროულად, სტატიკური დატვირთვით გამოწვეული წინაღობის ძალის ელემენტი (2)-ის მიხედვით

$$dF_{\text{სტატიკური}} = b \left( P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 (y')^2 \right) \frac{y' \cdot \sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{1+(y')^2}} dx = b(P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 (y')^2) y' dx \quad (8)$$

ხოლო სტატიკური კომპონენტით გამოწვეული სრული წინაღობის ძალა

$$F_{\text{სტატიკური}} = \int_0^L b(P_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 (y')^2) y' dx \quad (9)$$

მოდრავი ჰაერის ნაკადის დინამიკური დაწნეხვის შედეგად წარმოქმნილი წნევის ძალა ქმნის დამატებით წინაღობას. ამ ძალის წარმოქმნის მექანიზმი შეიძლება აღიწეროს შემდეგნაირად: ჰაერის ნაკადი განიცდის ფრთის ზედაპირიდან არეკვლას (იხ. სურ. 2), შედეგად იცვლება ჰაერის იმპულსის მიმართულება, რაც გამოიხატება რეაქციის ძალის წარმოქმნაში. რაოდენობრივი შეფასებისთვის უნდა დაიწეროს აღნიშნული იმპულსის ცვლილება ჰორიზონტალური  $x$  ღერძის მიმართ [4, 5, 11].



სურ. 2. ფრთის პროფილზე მოქმედი დინამიკური ძალა

ჰაერის ნაკადის სიჩქარის მდგენელი ზედაპირიდან არეკვლის შემდეგ იქნება  $v_x = v_\infty \cos(2\theta)$ , ხოლო სიჩქარის ცვლილება  $\Delta v_x = v_\infty - v_x = v_\infty(1 - \cos(2\theta)) = v_\infty \cdot 2(\sin\theta)^2 = \frac{2v_\infty(y')^2}{1+(y')^2}$ . რაც შეეხება ჰაერის ნაკადის მასას, ის შეიძლება შეფასდეს შემდეგნაირად: განვიხილოთ ფრთის კონტურის განსახილველ წერტილის მახლობლად მართკუთხა განივკვეთის მქონე ვიწრო ზოლი, რომლის ფართობი იქნება  $\Delta S = b \cdot \Delta y = b \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ , მაშინ ზღვარზე გადასვლისას  $dS = b \cdot y' \cdot dx$ . ამ ზოლში გამავალი ჰაერის ნაკადის მასა იქნება  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \cdot \Delta S \cdot v_\infty \cdot \Delta t$ , ხოლო იმპულსის ცვლილება  $\Delta p = \Delta m \cdot \Delta v_x$ . ამ ყოველივეს გათვალისწინებით კონტურის მოცემულ წერტილზე მოქმედი ელემენტარული რეაქციის ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი, რომელიც სიდიდით წინააღობის ძალის ტოლია, იქნება:

$$dF_{\text{დინამიკური}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot b \cdot (y')^3}{1+(y')^2} dx \quad (10)$$

მაშინ, სრული წინააღობის ძალის დინამიკური კომპონენტია:

$$F_{\text{დინამიკური}} = \int_0^{x_0} \frac{2 \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot b \cdot (y')^3}{1+(y')^2} dx = \int_0^L \frac{2 \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot b \cdot (y')^3}{1+(y')^2} \theta(x_0 - x) dx \quad (11)$$

სადაც  $\theta(x_0 - x)$  ჰევისაიდის ფუნქციაა.

(1) გამოსახულების მესამე შესაკრები გამოწვეულია ჰაერის ნაკადის ფრთის ზედაპირთან ხახუნის შედეგად წარმოქმნილი ძალის (მოქმედებს ზედაპირის მხეხი მიმართულებით) ჰორიზონტალურ ღერძთან მდგენელების აჯამებით [6, 8, 10, 13]. ჰაერის ნაკადის დაბალ სიჩქარეზე ლამინარული დინების შემთხვევაში შესაძლოა სასაზღვრო ფენების მიხედვით ხახუნი გათვალისწინებული იქნას, უფრო გამარტივებული სახით, რაც გულისხმობს, რომ მისი სიდიდე სიჩქარის პროპორციულია. ხახუნის ძალის ელემენტარული მნიშვნელობა  $d\tau = \mu v dS$ , სადაც  $v = v_\infty \sqrt{1 + (y')^2}$ ,  $dS = b dl = b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ , ხოლო  $\mu$  ხახუნის კოეფიციენტი. ამ ძალის ჰორიზონტალური მდგენელი  $dF_{\text{ხახუნი}} = d\tau \cdot \cos(\theta) = \frac{d\tau}{\sqrt{1+(y')^2}}$ , სრული ძალისთვის იქნება:

$$F_{\text{ხახუნი}} = \int_0^L \mu v_{\infty} b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (12)$$

აღსანიშნავია, რომ ხახუნის კოეფიციენტის განსაზღვრა მოითხოვს, მაღალი სიზუსტით ნატურალური ექსპერიმენტების ჩატარებას, რაც წარმოდგენილი კვლევის ფარგლებში ვერ მოხერხდა. ამიტომ გამარტივების მიზნით ნაგულისხმევია იდეალურად გლუვი ზედაპირის შემთხვევა, რომლის დროსაც ხახუნის კოეფიციენტი  $\mu = 0$ . შემდგომი გამოთვლები წარმოებს 1 ფორმულის მესამე შესაკრების გარეშე, რაც საბოლოოდ მიიღებს სახეს:

$$F_x = \int_0^L \left[ b \left( P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (y')^2 \right) y' + \frac{2 \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot (y')^3}{1 + (y')^2} \theta (x_0 - x) \right] dx \quad (12)$$

ზემოთ მოყვანილი მაგალითის ამოხსნის ანალოგიურად,  $F_x$ -ის სიდიდე ქმედების ანალოგიურია და განსაზღვრული ამოცანაც სწორედ მის მინიმიზაციას ეხება. ანუ უნდა შეირჩეს ისეთი  $y(x)$  კონტური, რომელიც (12) გამოსახულებას მინიმიზაციას მინიმალურ მნიშვნელობას. ამოხსნის მეთოდიკა გულისხმობს, რომ წინააღობის ძალის გამომსახველი სიდიდის ვარიაცია იყოს 0-ის ტოლი:

$$\delta F_x = 0 \quad (13)$$

სადაც ლაგრანჟიანის როლში (12)-ის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაა:

$$\mathcal{L}(x; y; y') = b \left( P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (y')^2 \right) y' + \frac{2 \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot (y')^3}{1 + (y')^2} \theta (x_0 - x) \quad (14)$$

აღსანიშნავია, რომ (14) გამოსახულება ცხადი სახით არ შეიცავს  $y(x)$  ფუნქციას, რის გამოც ლაგრანჟის განტოლება (3) მიიღებს გამარტივებულ სახეს [6]:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = 0 \quad (15)$$

რომელიც უნდა ამოიხსნას შემდეგი სასაზღვრო პირობების მიხედვით:

$$y(0) \text{ და } y(L) = 0 \quad (16)$$

მიღებული გამოსახულებების სირთულის გამო აქ მოყვანილია მხოლოდ შედეგები. აღსანიშნავია, რომ გამოთვლები განხორციელდა კომპიუტერული პროგრამა „Maple“-ის გამოყენებით. (15)-ის ზოგადი ამონახსნი, მიუხედავად განუსაზღვრელ კოეფიციენტზე დამოკიდებული გამოსახულების სირთულისა, საბოლოო ჯამში დაიყვანება წრფის ფუნქციაზე

$$y(x) = Ax + B \quad (17)$$

ხოლო (16) სასაზღვრო პირობების გამოყენებით მიიღება მარტივი ტრივიალური ფორმა:

$$y(x) = 0 \quad (18)$$

რაც ნიშნავს, რომ ფრთის პროფილის ფორმა უნდა იყოს ჰორიზონტალური წრფის მონაკვეთი. ეს შედეგი გარკვეულწილად მოსალოდნელი იყო, რადგან მათემატიკური თვალსაზრისით მხოლოდ სწორი ხაზის (ან ბრტყელი ფურცელი) ფორმის პროფილს ექნება მინიმალური წინაღობა.

პრაქტიკული თვალსაზრისით ეს შედეგი გამოუსადეგარია. ჩნდება გარკვეული ხელოვნური ჩარევის საჭიროება, რაც ფრთის პროფილის კონტურის მახასიათებელ სპეციფიკას თავიდანვე გაითვალისწინებს. ეს გამოწვეულია იმით, რომ (15) სახით მოცემული გამოსახულება არის მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნის შედეგად ჩნდება ორი განუსაზღვრელი კოეფიციენტი. ისინი მხოლოდ საკმარისია (17) წრფის პარამეტრების განსაზღვრისთვის, თანამედროვე საფრენ აპარატებში გამოყენებული კონტურის ფორმა კი გაცილებით რთულია და შეიცავს გარკვეულ დათქმებს, რომლებიც აუცილებლად უნდა იყოს გათვალისწინებული, კერძოდ: ბგერამდელი სიჩქარეებისთვის გამოყენებულ პროფილებს აქვთ მომრგვალებული თავი (წვეთის ფორმა), წვეროდან რაიმე  $x_0$  მანძილზე შესაბამისი სიგანის მაქსიმუმი და დაცულია წირის გლუვობა. ეს მათემატიკურად გამოსახება შემდეგნაირად:

$$y'(0) = \infty, y(x_0) = h \text{ და } y'(x_0) = 0 \quad (19)$$

ცხადია ამ დამატებითი პირობების გათვალისწინება მხოლოდ ორი დამოუკიდებელი კოეფიციენტის ფორმით ვერ მოხდება, ამიტომ კვლევის ფარგლებში შემუშავდა ახალი მიდგომა, რაც წარმოდგენილ მოთხოვნებს დააკმაყოფილებს.

(19) დამოკიდებულებებით განსაზღვრული და ასევე სასაზღვრო პირობების ავტომატურად შესრულება, იძლევა მნიშვნელოვან შესაძლებლობას მოხდეს ფრთის პროფილის განმსაზღვრელი ფუნქციის მოდერნიზება ისე, რომ მამრავლის სახით გაჩნდეს უცნობი ფუნქცია, რომლის ფორმა განისაზღვროს (15) ლაგრანჟის განტოლებიდან გამომდინარე, რაც საბოლოო ჯამში პროფილის კონტურის დახვეწას გამოიწვევს. წინააღობის ძალის მინიმუმის პირობიდან გამომდინარე, კერძოდ ეს ფორმა შეიძლება წარმოდგეს შემდეგი სახით:

$$y(x) = x \cdot \ln(x) \cdot \varphi(x) \quad (20)$$

მიუხედავად ამდაგვარი მცდელობისა, ლაგრანჟის განტოლების ამონახსნი მაინც დაიყვანება წრფივი ფუნქციის (17) სახეზე, ანუ მეთოდს რაიმე სახის გაუმჯობესება არ მოუცია.

აღნიშნული შედეგი გამოწვეულია იმით, რომ საწყის ამოცანად აღებულია სიმეტრიული ფრთის პროფილის კონტურის განსაზღვრა წინააღობის ძალის მინიმიზაციის გზით. მიუხედავად ხელოვნური ჩარევისა, საბოლოო შედეგი მაინც ტრივიალური ფორმისაა, რაც ლოგიკურად მოსალოდნელი იყო. უფრო საინტერესო სურათის მიღების მოლოდინი ჩნდება ასიმეტრიული პროფილების განხილვისას, როცა მინიმალურ წინააღობის ძალის მოთხოვნასთან ერთად ჩნდება მაქსიმალური ამწევი ძალის მიღების საჭიროება, რაც საერთო სურათს ართულებს. ასეთ შემთხვევაში ფრთის კონტური არატრივიალური ფორმის გამოჩნდება. აღნიშნული საკითხი შემდგომი კვლევის საგანია.

## დასკვნა

წარმოდგენილი კვლევის შედეგად დადგინდა, რომ სიმეტრიული ფრთის პროფილის კონტურის განსაზღვრა მხოლოდ ვარიაციული მეთოდითა და ლაგრანჟის განტოლების ამოხსნით ვერ იძლევა პრაქტიკულად გამოსადეგ ფორმას, რადგან მიღებული შედეგი ტრივიალურია და ემთხვევა ჰორიზონტალურ წრფეს. ეს ნიშნავს, რომ რეალური აეროდინამიკური პირობების გათვალისწინებით, მხოლოდ თეორიული მინიმიზაციის საფუძველზე მიღებული კონტური ვერ უზრუნველყოფს ეფექტურ ნაკადს და მინიმალურ წინააღმდეგობას. აღნიშნული ფაქტი ადასტურებს, რომ სიმეტრიული პროფილის შემთხვევაში ნულოვანი შეტევის კუთხეზე საჭირო ხდება დამატებითი გეომეტრიული ან ფიზიკური შეზღუდვების შემოღება, რომლებიც გაითვალისწინებენ ფრთის კონტურის ბუნებრივ ფორმას, ნაკადის გამრუდებას და სეპარაციის თავიდან აცილების პირობებს.

ამავე დროს, ნაშრომში წარმოდგენილი მიდგომა ქმნის მყარ თეორიულ საფუძველს შემდგომი კვლევებისთვის. განსაკუთრებით საინტერესოა მეთოდის გამოყენება ასიმეტრიული პროფილებისთვის, სადაც შეტევის კუთხის არანულოვან მნიშვნელობებზე მოსალოდნელია არატრივიალური შედეგები და ეფექტური ფორმის მიღება. მიღებული დასკვნები შეიძლება გამოყენებულ იქნას როგორც საწყისი მოდელი ფრთის კონსტრუქციული ოპტიმიზაციის, სასრულ ელემენტთა მეთოდით სიმულაციებისა და ექსპერიმენტული ტესტირების ერთობლივი სისტემის შესაქმნელად, რაც საბოლოო ჯამში ხელს შეუწყობს ენერგოეფექტურ და დაბალწინააღმდეგობის მქონე საჰაერო აპარატების განვითარებას.

### გამოყენებული ლიტერატურა:

1. Anderson, John D. Jr. 2016. Fundamentals of Aerodynamics. 6th ed. New York: McGrawHill;
2. Anderson, John D. Jr. 2001. A History of Aerodynamics and Its Impact on Flying Machines. Cambridge: Cambridge University Press;
3. Von Kármán, Theodore. 2004. Aerodynamics: Selected Topics in the Light of Their Historical Development. New York: Dover Publications;
4. Von Kármán, Theodore and M. A. Biot. 1950. Mathematical Methods in Engineering: An Introduction to the Mathematical Treatment of Engineering Problems. New York: McGrawHill;
5. Von Kármán, Theodore and M. A. Biot. 1958. General Aerodynamic Theory. 2 vols. Berlin: Julius Springer;
6. Vincenti, Walter G. 1990. What Engineers Know and How They Know It: Analytical Studies from Aeronautical History. Baltimore: Johns Hopkins University Press;
7. Bradshaw, Peter. 1964. Experimental Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press;
8. Bradshaw, Peter. 1971. An Introduction to Turbulence and Its Measurement. Oxford: Pergamon Press;
9. Bradshaw, Peter, T. Cebeci, and J. H. Whitelaw. 1977. Momentum Transfer in Boundary Layers. New York: Hemisphere Publishing;
10. Bradshaw, Peter, T. Cebeci, and J. H. Whitelaw. 1981. Engineering Calculation Methods for Turbulent Flows. London: Academic Press;

11. Küchemann, Dietrich. 1963. Aerodynamics of Propulsion. New York: McGrawHill;
12. Küchemann, Dietrich. 1978. The Aerodynamic Design of Aircraft. Oxford: Pergamon Press;
13. Hoerner, Sighard F. 1951. Aerodynamic Drag. Dayton: Otterbein Press;
14. Hoerner, Sighard F. 1965. FluidDynamic Drag. Bricktown, NJ: Hoerner Fluid Dynamics;
15. Hoerner, Sighard F., and Henry V. Borst. 1975. FluidDynamic Lift. Bricktown, NJ: Hoerner Fluid Dynamics;
16. Wood, Karl Dawson. 1930 (rev. 1950). Airplane Design and Technical Aerodynamics. Englewood Cliffs, NJ: PrenticeHall;
17. Wood, Karl Dawson. 1940 (rev. 1955). Technical Aerodynamics. New York: PrenticeHall;
18. Katz, Joseph, and Allen Plotkin. 2001. LowSpeed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods. New York: McGrawHill;
19. Hoerner, Sighard F. 1945. FluidDynamic Lift. Bricktown, NJ: Hoerner Fluid Dynamics;
20. Marchman, James F. III. 2004. Aerodynamics and Aircraft Performance. Blacksburg, VA: Virginia Tech Libraries.

## Theoretical Model for Determining the Contour of a Symmetrical Wing Profile for Drag Minimization

Bidzina Abesadze<sup>1</sup>, Saba Kopaliani<sup>2</sup>, Lizi Ubilava<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup>Georgian Aviation University

16 Ketevan Dedopali Avenue, 0103 Tbilisi, Georgia

**Abstract:** *This paper presents a new methodology for determining the contour of a symmetrical wing profile based on the principle of least action and the application of variational calculus. The proposed mathematical model aims to minimize aerodynamic drag while satisfying geometric and physical boundary conditions. The theoretical analysis represents a significant step toward the design and optimization of aerodynamic surfaces in aircraft structures, as various issues arise when operating at low Reynolds numbers. The developed model enables the evaluation of the relationship between the wing profile geometry, flow characteristics, and the resulting aerodynamic resistance. Furthermore, it is demonstrated that for a symmetrical profile at zero angle of attack, achieving minimum drag purely by theoretical means is impossible, indicating the necessity of further investigation into more complex, asymmetrical airfoils. The obtained results provide a foundation for the development of improved optimization and modification methods for wing contour design.*

**Keywords:** *aerodynamics, wing profile, drag minimization, variational calculus, principle of least action, Lagrange equation, optimization, flow separation.*