კონტურზე ხისტად ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის ანგარიში წნევის წრფივი კანონით განაწილების შემთხვევაში

ს. ბლიაძე[1], ს. ბლიაძე[1], ნ. ბლიაძე[1]

[1]სსიპ სსტც „დელტა“, ბოგდან ხმელნიცკის ქ. 181, თბილისი, 0144, საქართველო

რეზიუმე

მოცემულ ნაშრომში მოცემულია კონტურზე ხისტად ჩამაგრებული წრიული სახის ფირფიტის ანგარიში წნევის წრფივი კანონით ცვლილების შემთხვევაში. სტატიაში მოცემულია ასეთი სახის ფირფიტების ანალიზი სიმტკიცეზე, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. მიღებულია ჩაღუნვის ფუნქციის ანალიზური მნიშვნელობა და მღუნავ მომენტთა და დეფორმაციათა აღმწერი გამოსახულებები. მოცემულია ასევე გრაფიკული ინტერპრეტაცია.

საკვანძო სიტყვები

წრიული ფირფიტა, ძაბვები, ჩაღუნვის ფუნქცია, მღუნავი მომენტები.

ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ კონტურზე ხისტად ჩამაგრებული r რადიუსისა და h სისქის მქონე წრიული ფირფიტა, რომელის მთელ ზედაპირზე მოქმედებს წნევა რომელიც განაწილებულია $q = q_0 x$ წრფივი კანონით. ჩაღუნვის ფუნქცია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$w = k \cdot x \cdot \left(x^2 + y^2 - r^2\right)^2 \qquad (1)$$

სადაც k - ჯერჯერობით უცნობი მუდმივი კოეფიციენტია. დავწეროთ ფირფიტის ღუნვის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D} \qquad (2)$$

სადაც $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$, წარმოადგენს ცილინდრულ სიხისტეს. ამასთან შევნიშნოთ, რომ h ფირფიტის სისქეა, ხოლო μ პუანსონის კოეფიციენტია, ხოლო E დრეკადობის მოდულია. (1) გამოსახულებაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს მეორე ხარისხს რადგანაც პირველი ხარისხი (2) განტოლებას არ დააკმაყოფილებს. გამოვთვალოთ (2) განტოლებაში შემავალი წევრები და ვნახოთ რა შემთხვევაში აკმაყოფილებს მას (1) გამოსახულება:

გამოვთვალოთ (2) დიფერენციალურ განტოლებაში შემავალი კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = k\left(x^2 + y^2 - r^2\right)\left(x^2 + y^2 - r^2 + 4x^2\right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 4kxy\left(x^2 + y^2 - r^2\right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k\left(20x^3 + 12xy^2 - 12xr^2\right); \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k\left(12xy^2 + 4x - 4xr^2\right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 4ky\left(y^2 + 3x^2 - r^2\right);$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = k\left(60x^2 + 12y^2 - 12r^2\right);$$

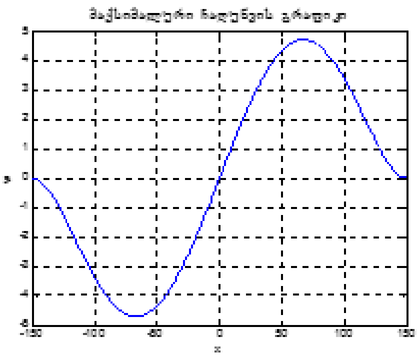
$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 24kxy; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 120kx; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 24kx;$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 24kxy; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial^2 y} = 24kx;$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (2) დიფერენციალურ განტოლებაში მივიღებთ:

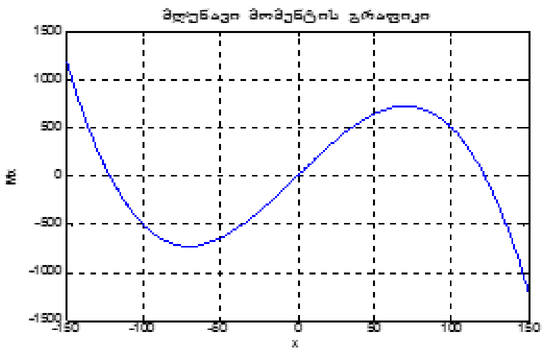
$$120kx + 2\cdot 24kx + 24kx = \frac{q_0 x}{D} \Rightarrow k = \frac{q_0}{192D};$$

შესაბამისად ჩაღუნვის ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს (იხ. ნახ. 1): $w = \frac{q_0 x}{192D}\cdot\left(x^2 + y^2 - r^2\right)^2$ (7)



ნახ. 1. ჩაღუნვის ფუნქცია.

როგორც ჩაღუნვის ფუნქციის გამოსახულებიდან ჩანს კონტურზე (წრეწირზე) მისი მნიშვნელობები ნულის ტოლია. რადგანაც ფირფიტა ხისტადაა ჩამაგრებული $\frac{\partial w}{\partial x}$ და $\frac{\partial w}{\partial y}$ ტოლი უნდა იყოს ნულის, მართლაც (3) და (4) გამოსახულებები შეიცავენ წრეწირის განტოლებას ე. ი. კონტურზე მათი მნიშვნელობებიც ტოლია ნულის. ამგვარად ჩაღუნვის ფუნქცია აკმაყოფილებს სიხისტად ჩამაგრების პირობას. გამოვთვალოთ მღუნავი მომენტების მნიშვნელობები.



ნახ. 2. მღუნავი მომენტის გრაფიკი ox ღერძის გასწვრივ.

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ: გამოვთვალოთ მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა oy ღერძის მიმართ.

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\left[\frac{q_0}{192D}\left(20x^3 + 12xy^2 - 12xr^2\right) + \mu\frac{q_0}{192D}\left(12xy^2 + 4x^3 - 4xr^2\right)\right] =$$

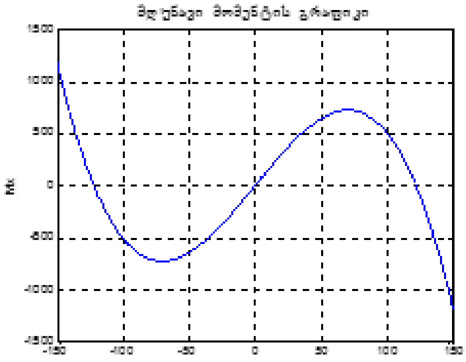
$$= -\frac{q_0 x}{48}\left[\mu + 5x^2 + 3y^2\left(1+\mu\right) - r^2\left(3+\mu\right)\right]; \quad (8)$$

ფირფიტის ცენტრში მომენტის მნიშვნელობა $(0;0)$ წერტილში ტოლია (ნახ. 2): $M_x\big|_{(0;0)} = 0$,

ხოლო ფირფიტის კიდეზე $(r,0)$ წერტილში

$$M_x\big|_{(r;0)} = -\frac{q_0 r}{48}\left[2r^2 + \mu\left(1 - r^2\right)\right].$$

$$M_y = -D\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\frac{q_0 x}{48}\left[5x^2\mu + 1 + 3y^2\left(\mu + 1\right) - r^2\left(3\mu + 1\right)\right] \quad (9)$$



ნახ. 3. მღუნავი მომენტის გრაფიკი ფირფიტის კონტურზე oy ღერძის გასწვრივ.

ფირფიტის ცენტრში მომენტის მნიშვნელობა $(0;0)$ წერტილში ტოლია: $M_y\big|_{(0;0)}=0$, ხოლო ფირფიტის კიდეზე $(r,0)$ წერტილში $M_y\big|_{(r;0)}=-\frac{q_0 r}{48}\left(2r^2\mu+1-r^2\right)$ (ნახ. 3) (8) და (9) ფორმულების ანალიზით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მაქსიმალური ძაბვა მიიღება

$$\sigma_x=-\frac{12Dz}{h^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad z=\frac{h}{2}$$

მივიღებთ:

$$\sigma_{\max}=-\frac{6M_x}{h^2}=-\frac{1}{8}\cdot\frac{q_0 r}{h^2}\left(2r^2\mu+1-r^2\right).$$

გამოვთვალოთ მგრეხავი მომენტი:

$$M_{xy}=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=\frac{q_0 y(1-\mu)}{48}\left(y^2+3x^2-r^2\right);$$

ძვრის მიერ გამოწვეული ძაბვა ტოლია:

$$\tau_{xy}=-\frac{6M_{xy}}{h^2}=-\frac{q_0 y(1-\mu)}{48h^2}\left(3x^2+y^2-r^2\right).$$

განვსაზღვროთ ფირფიტაზე მოქმედი გადამჭრელ ძალები [1,4]:

$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-D\cdot\frac{q_0}{192D}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(20x^3+12xy^2-12xr^2+12xy^2+4x-4xr^2\right)=$$

$$=-\frac{q_0}{192}\frac{\partial}{\partial x}\left(20x^3+24xy^2-16xr^2+4x\right)=-\frac{q_0}{192}\left(60x^2+24y^2-16r^2+4\right)=$$

$$=-\frac{q_0}{48}\left(15x^2+6y^2-4r^2+1\right)$$

$$Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=-\frac{q_0}{192}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(20x^3+12xy^2-12xr^2+12xy^2+4x-4xr^2\right)=$$

$$=-\frac{q_0}{192}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(20x^3+24xy^2-16xr^2+4x\right)=-\frac{q_0}{4}xy.$$

ღუნვის დეფორმაციების განსაზღვრა მცირე ჩაღუნვების შემთხვევაში:

$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{h}{2}\cdot\frac{q_0}{192D}\left(20x^3+12xy^2-12xr^2\right)=-\frac{q_0 h}{48D}\left(5x^3+3xy^2-3xr^2\right)=$$

$$= -\frac{q_0 hx}{48D}\left(5x^2+3y^2-3r^2\right);$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{h}{2}\cdot\frac{q_0}{192D}\left(12xy^2+4x-4xr^2\right) = -\frac{hq_0 x}{48D}\left(3y^2+1-r^2\right).$$

განვსაზღვროთ ძვრის დეფორმაცია: $\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -2\cdot\frac{h}{2}\cdot 4\cdot\frac{q_0}{192D}\left(3x^2+y^2-r^2\right) = -\frac{q_0 h}{48D}\left(3x^2+y^2-r^2\right).$

დასკვნა

მიღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ჩაღუნვის ფუნქციის გამოსახულება, ასევე მიღებულია ორივე ღერძის მიმართ მღუნავი მომენტების და გადამხრელ ძალთა გამოსათვლელი ფორმულები, მოყვანილია ამონახსნთა გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ox და oy ღერძის გასწვრივ, ასევე მოცემულია დეფორმაციათა გამოსათვლელი ფორმულები მცირე ჩაღუნვების შემთხვევაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Тимошенко С.П. и Войновский-Кригер С. Плфстинки и оболочки. Москва. Изд. “Наука”, 1966 г., 636 стр.
2. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. Москва. Гос. Издательство литературы по строительству и архитектуре. 1957 г., 257 стр.
3. Вайнберг Д.В. Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. Киев, Изд. “Бндівельник”, 1970 г., 437 стр.
4. Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells. New York. Basel, Marcel Dekker, Inc. 2001, 651p

Calculation along the contour of a rigidly fixed circular sheet with a linear pressure distribution

Abstract

An image of the deflection function in a rectangular coordinate system was obtained, formulas were also obtained for calculating bending moments and shearing forces in both axes, and formulas were derived for calculating deformations at small deflections. A geometric interpretation of the solutions is given.