კონტურზე ხისტად ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის ანალიზი მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში

ს.ნ. ბლიაძე, ს.ს. ბლიაძე, ნ.ს. ბლიაძე, ი. ლოლაძე
სსიპ სსტც „დელტა", ზერი გაბრიელ სალოსის გამზ. 191. 0144 თბილისი, საქართველო

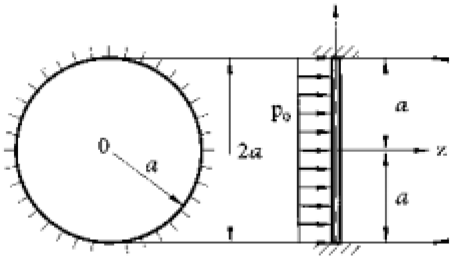
ანოტაცია

წრიული სახის ფირფიტები ერთ-ერთი ფართოდ გავრცელებულ ფირფიტებს წარმოადგენს მართკუთხა ფირფიტების შემდეგ, კერძოდ მისი ფართოდ გამოყენების სფეროს წარმოადგენს თვითმფრინავმშენებლობა (ლუკები), ხოლო რაც შეეხება მის ჩამაგრებას კონტურზე ფართოდ გავრცელებულია ხისტი ჩამაგრება. სტატიის მიზანს წარმოადგებს სწორედ ასეთი სახის ფირფიტების ანალიზი სიმტკიცეზე, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში. მიღებულია ჩაღუნვის ფუნქციის ანალიზური მნიშვნელობა და მღუნავ მომენტთა აღმწერი გამოსახულებები. მოცემულია ასევე გრაფიკული ინტერპრეტაცია. შევნიშნოთ, რომ ასეთი სახის ამოცანები გადაწყვეტილია პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

საკვანძო სიტყვები: წრიული ფირფიტა, ძაბვები, ჩაღუნვის ფუნქცია, მღუნავი მომენტები.

ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ კონტურზე ხისტად ჩამაგრებული r რადიუსისა და h სისქის მქონე წრიული ფირფიტა, რომლის მთელ ზედაპირზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა p_0 ინტენსიობით.



ნახ.1

ვთქვათ $r=a$ კოორდინატთა სათავე მოთავსებულია ფირფიტის ცენტრში (იხ. სქემა). დავწეროთ წრეწირის განტოლება რომელიც შემოსაზღვრავს ფირფიტას $x^2+y^2-r^2=0$, ჩაღუნვის ფუნქცია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$w=k\cdot\left(x^2+y^2-r^2\right)^2 \qquad (1)$$

სადაც k - ჯერჯერობით უცნობი მუდმივი კოეფიციენტია. დავწეროთ ფირფიტის ღუნვის დიფერენციალური განტოლება რომელიც მიიღო ლაგრანჟმა 1811 წ.

მათემატიკურად დიფ. განტოლება შეიძლება კლასიფიცირდეს როგორც წრფივი, მეოთხე რიგის კერძოწარმოებულებიან მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p_0}{D} \tag{2}$$

სადაც $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$, წარმოადგენს ცილინდრულ სიხისტე. ამასთან შევნიშნოთ, რომ h ფირფიტის სისქეა, ხოლო μ პუანსონის კოეფიციენტია, ხოლო E დრეკადობის მოდულია. (1) გამოსახულებაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს მეორე ხარისხს რადგანაც პირველი ხარისხი (2) განტოლებას არ დააკმაყოფილებს, ამასთან მსგავსი ამოცანების ამოხსნა მოსახერხებელია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემიდან პოლარულ კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლით. გამოვთავალოთ (2) განტოლებაში შემავალი წევრები და ვნახოთ რა შემთხვევაში აკმაყოფილებს მას (1) გამოსახულება:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=4kx\left(x^2+y^2-a^2\right);$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=4ky\left(x^2+y^2-a^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=4k\left(3x^2+y^2-a^2\right); \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=4k\left(x^2+3y^2-a^2\right); \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=8kxy;$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=24kx; \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}=24ky; \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=24k; \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=24k;$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=8ky; \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial^2 y}=8k;$$

ჩავსვათ მიღებული გამოსახულებები (2) დიფეფენციალურ განტოლებაში მივიღებთ:

$$24k+2\cdot 8k+24k=\frac{p_0}{D}\Rightarrow k=\frac{p_0}{64D};$$

შესაბამისად ჩაღუნვის ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს (იხ. ნახ.1) [1,2,3,4]:

$$w=\frac{p_0}{64D}\cdot\left(x^2+y^2-a^2\right)^2 \tag{5}$$

რადგანაც (5) გამოსახულებაში შედის წრეწირის განტოლება, ცხადია კონტურზე $w=0$. გარდა ამისა რადგანაც ფირფიტა ხისტადაა ჩამაგრებული $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ და $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ ტოლი უნდა იყოს ნულის. რადგანაც

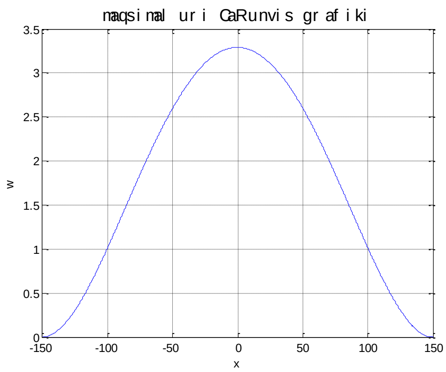
$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{p_0}{16D}x\left(x^2+y^2-a^2\right); \quad \text{და} \quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{p_0}{16D}y\left(x^2+y^2-a^2\right);$$

ორივე ამ გამოსახულებაში შედის წრეწირის განტოლება ამიტომ $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=0$.

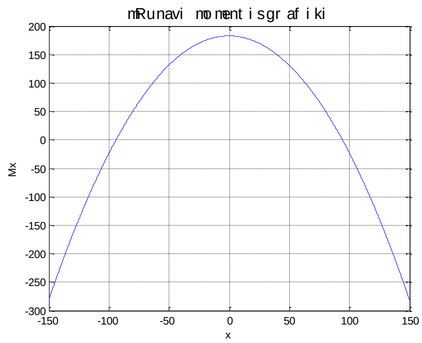
ცხადია ჩაღუნვა თავის უდიდეს მნიშვნელობას მიაღწევს ცენტრში როდესაც $x=y=0$; მართლაც, დავწეროთ ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა:

$$\begin{cases}\frac{\partial w}{\partial x}=0;\\ \frac{\partial w}{\partial y}=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\left(x^2+y^2-a^2\right)=0;\\ y\left(x^2+y^2-a^2\right)=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0;\\ y=0.\end{cases}$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=0}=\frac{p_0a^2}{16D}; \quad B=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right|_{x=0,y=0}=\frac{p_0a^2}{8D}xy=0; \quad C=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x=0,y=0}=\frac{p_0a^2}{16D};$$



ნახ.2



ნახ.3

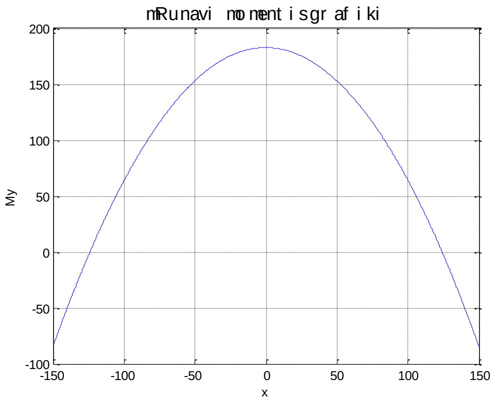
რადგანაც $AC-B^2=\frac{q^2r^2}{256D^2}>0$ და $A>0$ აქედან გამომდინარე ჩაღუნვის w ფუნქციას $(0;0)$ წერტილში გააჩნია უმცირესი მნიშვნელობა რომელიც ტოლია: $w_{\max}=w_{(0;0)}=\frac{p_0a^4}{64D}$

(6)

გამოვთვალოთ მღუნავი მომენტების მნიშვნელობები ox ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახ. 3):

$$\begin{aligned}M_x&=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\\ &=-D\left[\frac{p_0}{16D}\left(3x^2+y^2-a^2\right)+\mu\frac{p_0}{16D}\left(x^2+3y^2-a^2\right)\right]=\\ &=-\frac{p_0}{16}\left[3x^2+y^2-a^2+\mu\left(x^2+3y^2-a^2\right)\right]=\\ &=-\frac{p_0}{16}\left[x^2(\mu+3)+y^2(1+3\mu)-a^2(1+\mu)\right];\end{aligned} \qquad (7)$$

ფირფიტის ცენტრში მომენტის მნიშვნელობა $(0;0)$ წერტილში ტოლია: $M_x\big|_{(0;0)} = \frac{p_0 a^2}{16}(1+\mu)$, ხოლო ფირფიტის კიდეზე $(r,0)$ წერტილში $M_x\big|_{(r;0)} = -\frac{p_0 a^2}{8}$, [1,2,4].
გამოვთვალოთ მღუნავი მომენტის მნიშვნელობა oy ღერძის გასწვრივ (იხ. ნახ. 3) [1,2,4]:



ნახ.4

$$
\begin{aligned}
M_y &= -D\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \\
&= -D\left[\mu\frac{p_0}{16D}\left(3x^2 + y^2 - a^2\right) + \frac{p_0}{16D}\left(x^2 + 3y^2 - a^2\right)\right] = \\
&= -\frac{p_0}{16}\left[\mu\left(3x^2 + y^2 - a^2\right) + x^2 + 3y^2 - a^2\right] = \\
&= -\frac{p_0}{16}\left[x^2(1+3\mu) + y^2(3+\mu) - a^2(1+\mu)\right];
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

ფირფიტის ცენტრში მომენტის მნიშვნელობა $(0;0)$ წერტილში ტოლია: $M_y\big|_{(0;0)} = \frac{p_0 a^2}{16}(1+\mu)$, ხოლო ფირფიტის კიდეზე $(r,0)$ წერტილში $M_y\big|_{(r;0)} = -\frac{p_0 a^2 \mu}{8}$. (7) და (8) ფორმულების ანალიზით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მაქსიმალური ძაბვა მიიღება ფირფიტის კონტურზე რომელიც ტოლია:

$$\sigma_x = -\frac{12Dz}{h^3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad z = \frac{h}{2} \quad \text{მივიღებთ: } \sigma_{\max} = -\frac{6M_x}{h^2} = -0.75\cdot\frac{qr^2}{h^2}.$$

გამოვთვალოთ მგრეხავი მომენტი: $M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{p_0(1-\mu)}{8}xy;$

ძვრის მიერ გამოწვეული ძაბვა ტოლია:

$$\tau_{xy} = -\frac{6M_{xy}}{h^2} = -\frac{3p_0(1-\mu)}{4h^2}xy.$$

განვსაზღვროთ ფირფიტაზე მოქმედი გადამჭრელ ძალები [1,4]:

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\cdot 4\cdot\frac{p_0}{64D}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2+4y^2-2a^2\right) =$$

$$= -32D\frac{p_0}{64}x = -\frac{p_0}{2}x.$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\cdot 4\cdot\frac{p_0}{64D}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(4x^2+4y^2-2a^2\right) =$$

$$= -32D\frac{p_0}{64}y = -\frac{p_0}{2}y.$$

ღუნვის დეფორმაციების განსაზღვრა მცირე ჩაღუნვების შემთხვევაში:

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{h}{2}\cdot\frac{4p_0}{64D}\left(3x^2+y^2-a^2\right) = -\frac{p_0 h}{32D}\left(3x^2+y^2-a^2\right);$$

$$\varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{h}{2}\cdot\frac{4p_0}{64D}\left(x^2+3y^2-a^2\right) = -\frac{hq}{32D}\left(x^2+3y^2-a^2\right);$$

განვსაზღვროთ ძვრის დეფორმაცია:

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = -2\cdot\frac{h}{2}\cdot 8\cdot\frac{p_0}{64D}xy = -\frac{hp_0}{8D}xy.$$

დასკვნა

მიღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ჩაღუნვის ფუნქციის გამოსახულება, ასევე მიღებულია ორივე ღერძის მიმართ მღუნავი მომენტების და გადამჭრელ ძალთა გამოსათვლელი ფორმულები, მოყვანილია ამონახსენთა გეომეტრიული ინტერპრეტაცია *ox* ღერძის გასწვრივ მოცემულია დეფორმაციათა გამოსათვლელი ფორმულები მცირე ჩაღუნვების შემთხვევაში.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] Тимошенко С.П. и Войновский-Кригер С. Плфстинки и оболочки. Москва. Изд. “Наука”, 1966 г., 636 стр.

[2] Жемочкин Б.Н. Теория упругости. Москва. Гос. Издательство лителатуры по строительству и архитектуре. 1957 г., 257 стр.

[3] nВайнберг Д.В. Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. Киев, Изд. “Бндiвельник”, 1970 г., 437 стр.

[4] Ventsel E., Krauthammer T. Thin Plates and Shells. New York. Basel, Marcel Dekker, Inc. 2001, 651p.

Analysis in a rectangular coordinate system rigidly fixed round plate along the contour

S.N. Bliadze, S.S. Bliadze, N.S. Bliadze, I. Loladze
191 Monk Gabriel Salos Ave. 0144, Tbilisi, Georgia

Abstract

An image of the deflection function in a rectangular coordinate system is obtained, as well as formulas for calculating bending moments and shearing forces along both axes, a geometric interpretation of the solutions is given, and formulas for calculating deformations along the ox axis at small mixing are given.

Key words: circular plate, stresses, bending function, bending moments.